الموضوع [15] التاريخ 8 / 12 / 201

الفصل الثالث : جبر المنطق

في هذا الفصل سوف نكتفي بالتعرف على جبر المنطق أو جبر العبارات والمنطق هنا ثنائي القيمة والذي هو أحد التطبيقات الهامة لجبر بول الذي أصبح أساسياً في قواعد المعادلات والمناقشات والبراهين وفي بناء الحاسبات الآلية وكتابة البرامج لها وفي تطوير العلوم الرياضية بصورة عامة.

* العبارات المنطقية (القضايا):

تعريفها: هي جملة خبرية تصريحية تحمل معنى محدد إما صحيح أو خطأ.

- نرمز للقضايا عادة p، q، r، s، t ....

مثال: بين أي من العبارات الآتية منطقية ؟؟

1- الأرض كروية ✓ عبارة منطقية صحيحة

2- الشمس ستشرق غداً ✗ ليست قضية أو عبارة منطقية

3- اذهب إلى البيت في الساعة مع السلامة انت مدعو لحضور المسرحية ليست قضية لأنها ليست جملة خبرية (كلام انشائي ليس منطقي)

4- 3 > 1- عبارة منطقية خاطئة

5- العدد الصحيح 2 هو عدد أولي قضية منطقية صحيحة

6- عمار ولد ذكي ليست منطقية

7- x عدد صحيح موجب أو x+5>0 جملة مفتوحة وعندما نأخذ x قيمة تصبح العبارة منطقية

* أدوات الربط المنطقية:

1- أداة النفي ~p ، ~q أو ¬p ، p'

2- أداة الربط الوصل "و" أو العطف ∧ p∧q (تقرأ: p و q)

3- أداة الفصل "أو" ∨ p∨q

* التوابع المنطقية أو الأشكال العباراتية:

إن العبارة $p \wedge q$ تمثل عبارة منطقية ذات معان عديدة كما أن p, q تسمى "متغيرات منطقية" وتسمى العبارة $p \wedge q$ "شكلاً عباراتياً أو تابعاً منطقياً".

تعريف الشكل العباراتي "التابع المنطقي":

هو عبارة مكونة من متغيرات منطقية وأدوات الربط بينها فمثلاً $p \vee q'$ ، $p \wedge (q' \vee r)$

- إن الشكل $w = f(p, q, r)$ شكل عباراتياً فإن w يأخذ قيمة الحقيقة ص أو خطأ لعد أن يأخذ كل متغير قيمة الحقيقة

مثال:

لتكن p, q, r متغيرات منطقية ولتكن الأشكال العباراتية الآتية $(\wedge = \cdot \quad \vee = + \quad \sim = ')$

1) $q \cdot r$ 2) $q + r$ 3) $p \cdot (q + r)$ 4) $p + q \cdot r$

5) $p \cdot r + q \cdot r$

وبفرض أن p, q صحيحتان و r خاطئة عين قاعدة قيم الحقيقة للأشكال المعطاة سابقاً.

الحل:

1) خطأ 2) صح 3) صح

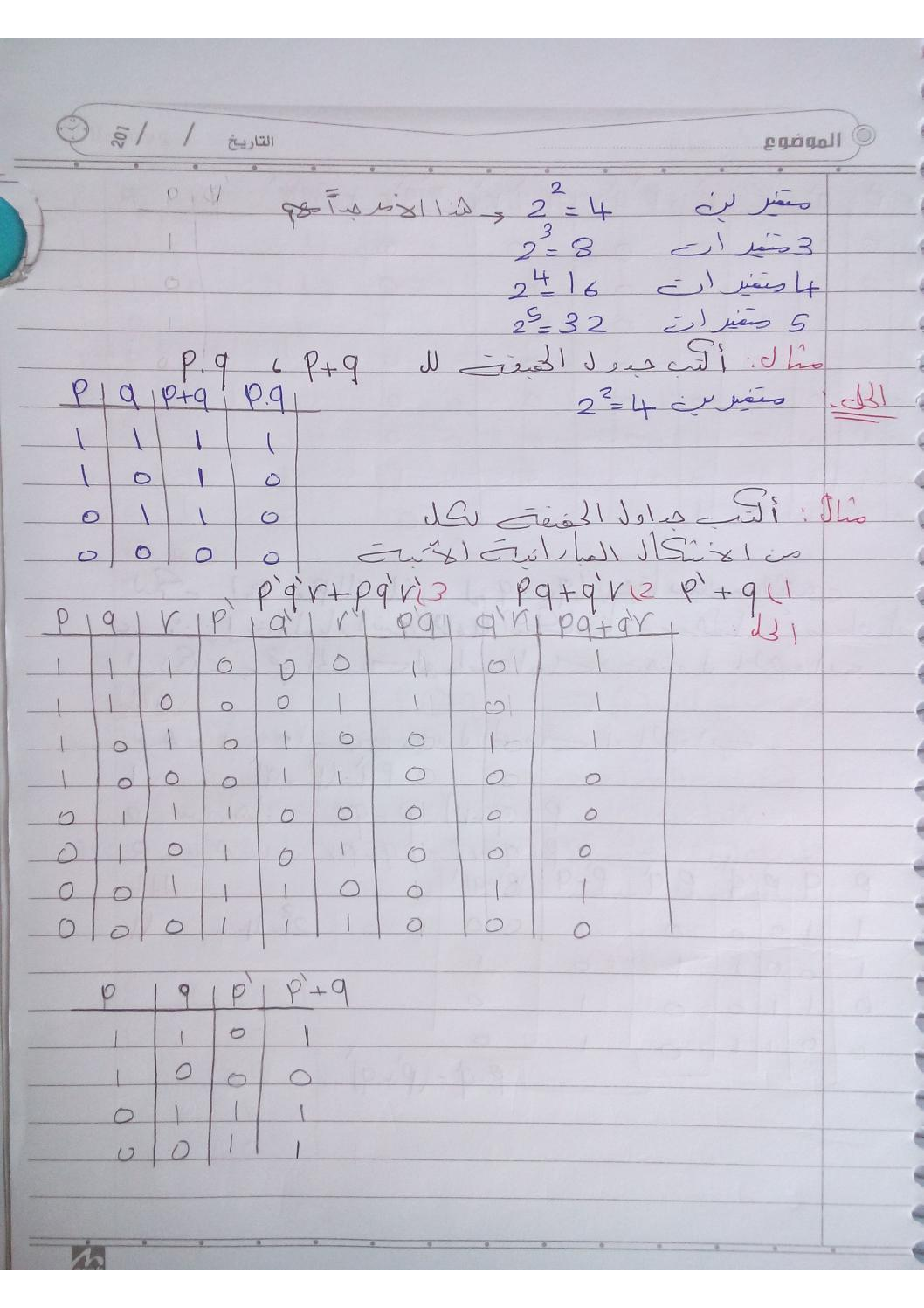
4) صح 5) خطأ

* جدول الحقيقة للأشكال العباراتية

بما أن كل متغير يمكن أن يأخذ قيمتين فقط إما صح أو خطأ عندئذ نستطيع تنظيم جدول الحقيقة حسب عدد المتغيرات

2^n : متغير واحد $2^1 = 2$

p	$p' = \sim p$
1	0
0	1



متغيرين $2^2 = 4$ ← هذا الاخير جداً مهم

3 متغيرات $2^3 = 8$

4 متغيرات $2^4 = 16$

5 متغيرات $2^5 = 32$

مثال: أكتب جدول الصدق لل $p+q$ ، $p.q$

الحل: متغيرين $2^2 = 4$

p	q	p+q	p.q
1	1	1	1
1	0	1	0
0	1	1	0
0	0	0	0

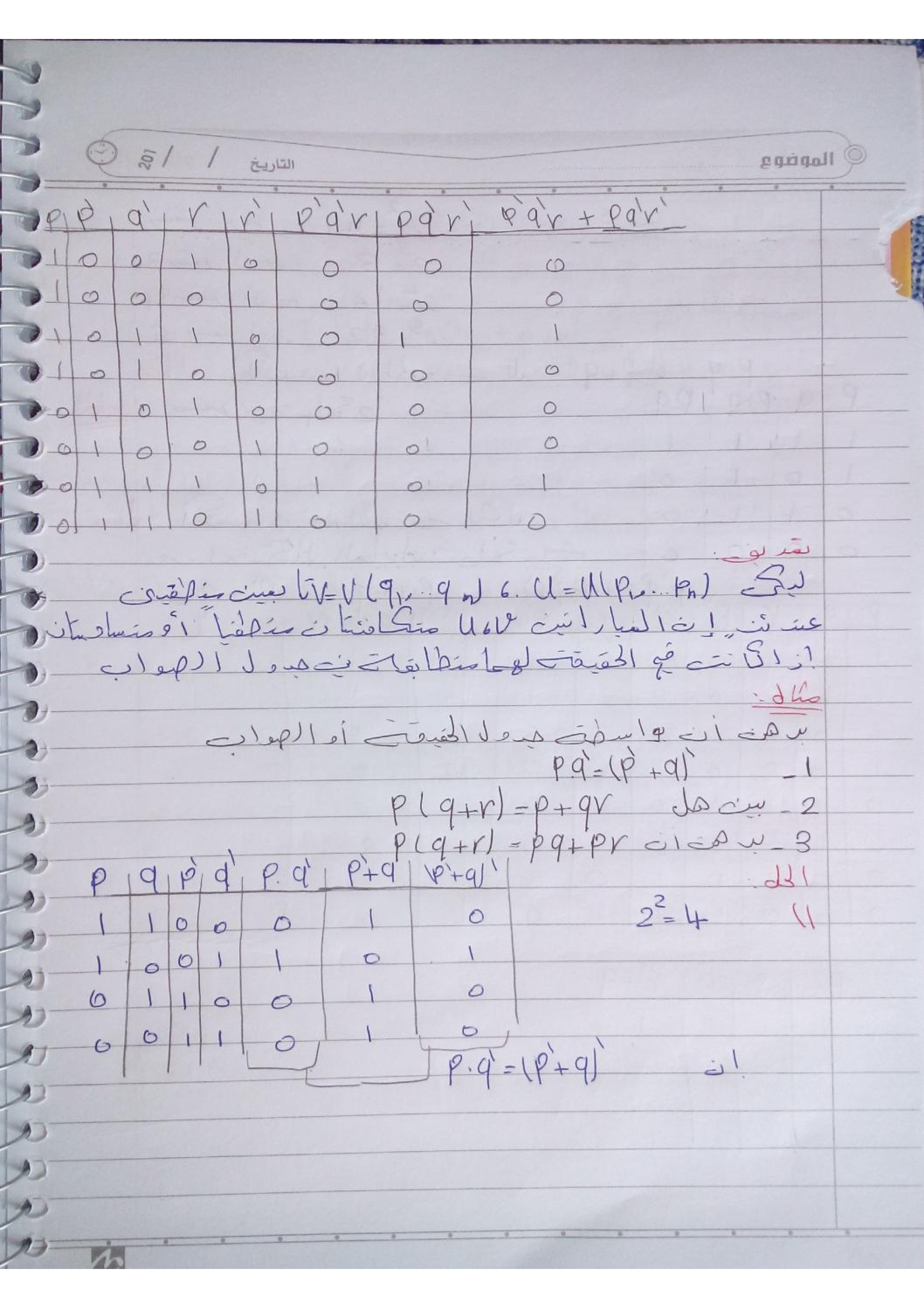
مثال: أكتب جداول الصدق لكل من الاشكال العبارية الآتية

1) $p' + q$ 2) $pq + q'r$ 3) $p'q'r + pq'r$

الحل

p	q	r	p'	q'	r'	pq	q'r	pq+q'r
1	1	1	0	0	0	1	0	1
1	1	0	0	0	1	1	0	1
1	0	1	0	1	0	0	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	1	0	0	0
0	0	1	1	1	0	0	1	1
0	0	0	1	1	1	0	0	0

p	q	p'	p'+q
1	1	0	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	0	1	1



p	p'	q'	r	r'	$p'q'r$	$pq'r'$	$p'q'r + pq'r'$
1	0	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0	0	0
1	0	1	1	0	0	1	1
1	0	1	0	1	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	0	1	0	1
0	1	1	0	1	0	0	0

تمرين:

لديك $U=U(p_1,\dots,p_n)$ ، $V=V(q_1,\dots,q_n)$ تابعين منطقيين
عندئذٍ إن العبارتين U,V متكافئتان منطقياً أو متساويتان
إذا كانت قيم الحقيقة لهما متطابقة في جدول الصواب

مثال:

برهن أن بواسطة جدول الحقيقة أو الصواب

1- $p.q' = (p'+q)'$

2- بين هل $p(q+r) = p+qr$

3- برهن أن $p(q+r) = pq+pr$

الحل:

1) $2^2=4$

p	q	p'	q'	$p.q'$	$p'+q$	$(p'+q)'$
1	1	0	0	0	1	0
1	0	0	1	1	0	1
0	1	1	0	0	1	0
0	0	1	1	0	1	0

إن $p.q' = (p'+q)'$

p	q	r	q+r	p(q+r)	qr	p+qr
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	0	1
1	0	1	1	1	0	1
1	0	0	0	0	0	1
0	1	1	1	0	1	1
0	1	0	1	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0

غير متساويين.

3) تمرين للبيت

المجموع أو المقتصرة

نرمز لها بـ $\oplus$ $p \oplus q$

إذا كانت p،q عبارتين منطقيتين ونعرف أداة الربط $\oplus$ بين العبارتين p، q

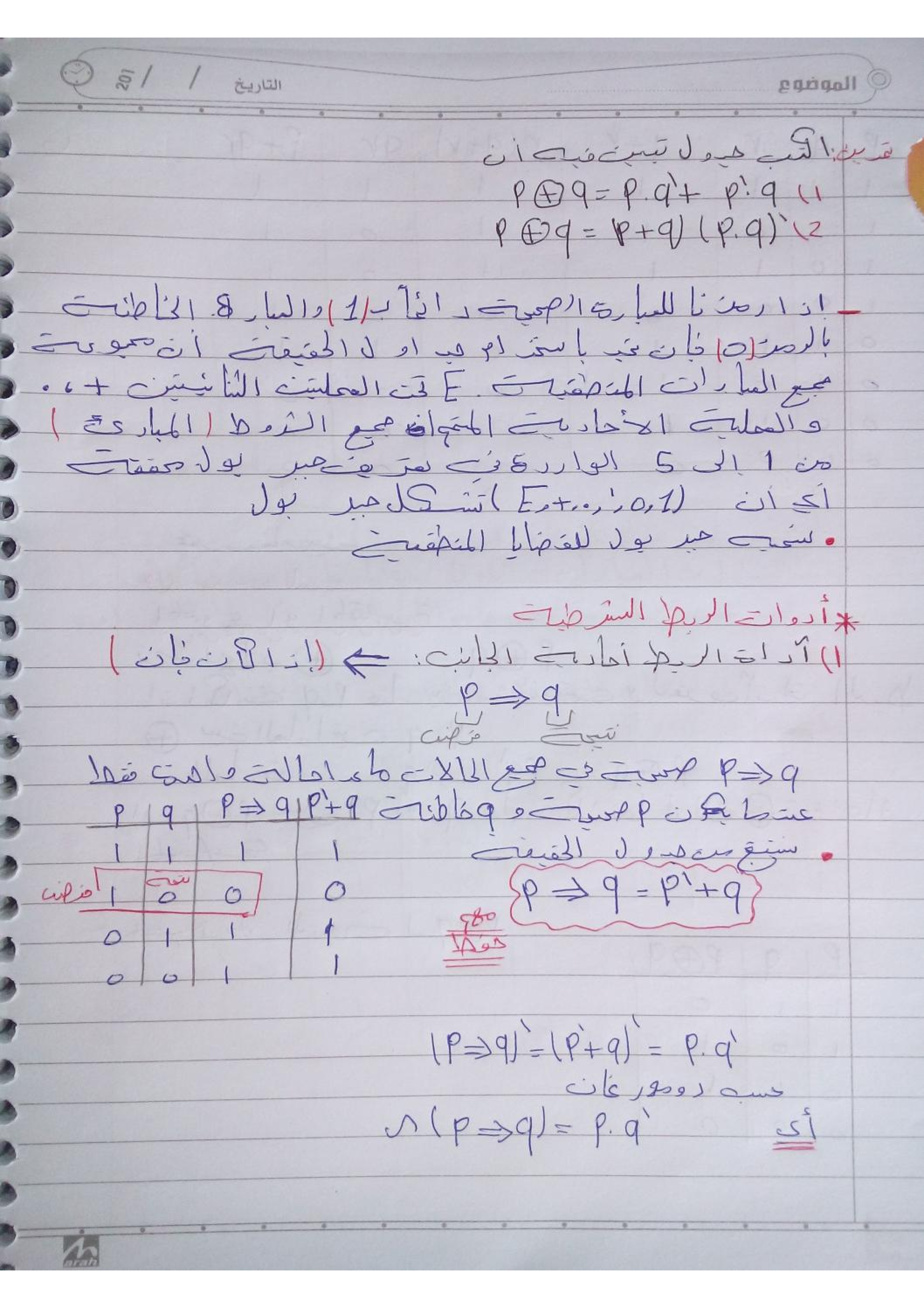
بالعبارة $p \oplus q = pq' + p'q$

إن $p \oplus q$ تعني p أو q وليس كلاهما لذلك $\oplus$ تدعى أو المقتصرة

مثال:

ارسم الجدول الحقيقة لـ $p \oplus q$

p	q	$p \oplus q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0



تمرين: اكتب جدول تبين فيه أن

1) $p \oplus q = p.q' + p'.q$

2) $p \oplus q = (p+q)(p.q)'$

- إذا رمزنا للعبارة الصحيحة دائماً بـ(1) والعبارة الخاطئة بالرمز (0) فإنه يجب باستخدام جداول الحقيقة أن مجموعة جميع العبارات المنطقية E تحت العمليتين الثنائيتين + ، . والعملية الأحادية المتممة جميع الشروط (العبارات) من 1 إلى 5 الواردة في تعريف جبر بول محققة أي أن $(E,+,.,',0,1)$ تشكل جبر بول

• تسمى جبر بول للقضايا المنطقية

* أدوات الربط الشرطية

1) أداة الربط أحادية الجانب: $\Rightarrow$ (إذا كان فإن)

$p \Rightarrow q$

p فرض ، q نتيجة

$p \Rightarrow q$ صحيحة في جميع الحالات ما عدا حالة واحدة فقط عندما يكون p صحيحة و q خاطئة

• نستنتج من جدول الحقيقة

$p \Rightarrow q = p' + q$

هام جداً

p	q	$p \Rightarrow q$	$p'+q$
1	1	1	1
1 (فرض)	0 (نتيجة)	0	0
0	1	1	1
0	0	1	1

$(p \Rightarrow q)' = (p'+q)' = p.q'$

حسب دومورغان

أي $\sim(p \Rightarrow q) = p.q'$

2) أداة الربط ثنائية الجانب $\Leftrightarrow$ (إن أو فقط إذا)

$\leftrightarrow$ أو $\leftrightarrow$ $p \Leftrightarrow q = p \Rightarrow q$

$q \Rightarrow p$

p	q	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

$$p \Leftrightarrow q = (p' + q)(q' + p)$$

• إن

$$p \Leftrightarrow q = p'q' + pq = (p \oplus q)'$$

متمم أو المقتصرة.

$$p \Leftrightarrow q = (p \oplus q)'$$

* الاستدلال (التوتولوجي) والتناقض:

- نسمي الشكل العباراتي استدلال (توتولوجي) إذا كانت قيم الحقيقة في جدول الحقيقة جميعها 1 بغض النظر عن المتغيرات البولية

- نسمي الشكل العباراتي تناقضاً إذا كانت قيم الحقيقة في جدول الحقيقة أصفار

مثال:

بين فيما إذا كان الشكل العباراتي استدلال أو تناقض أو غير ذلك:

1) $(p + q') \Rightarrow p.q$ (بدون استخدام الجدول)

2) $(p \Rightarrow q)(q \Rightarrow p')$

3) $(p \Rightarrow q) + (q \Rightarrow p)$

4) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p + q')$

الحل:

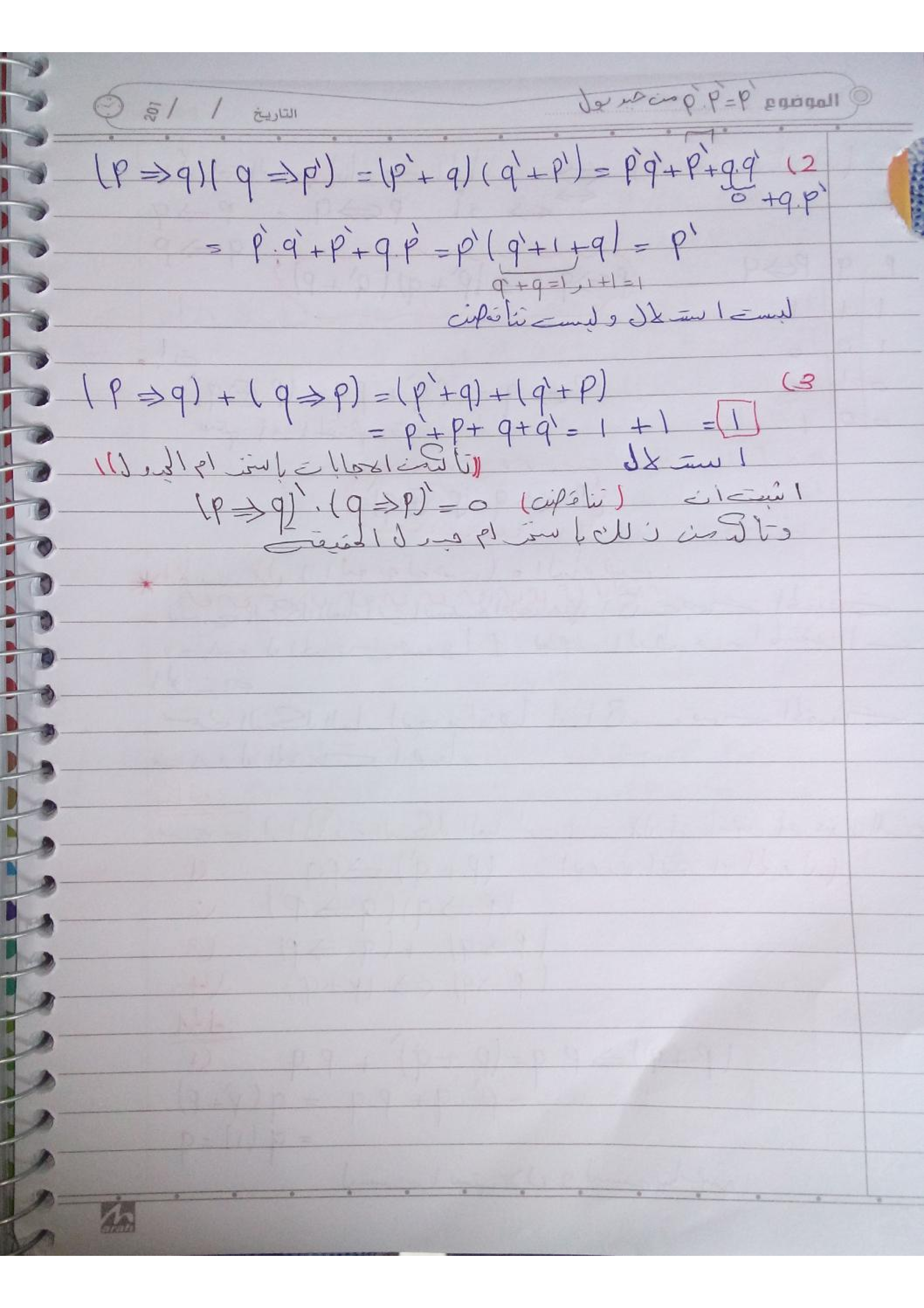
1)

$$(p + q') \Rightarrow p.q = (p + q')' + p.q$$

$$= p'.q + p.q = q(p' + p)$$

$$= q(1) = q$$

ليست استدلال وليست تناقض



2) $(p \Rightarrow q)(q \Rightarrow p') = (p' + q)(q' + p') = p'q' + p' + \underbrace{q.q'}_{0} + q.p'$

$= p'.q' + p' + q.p' = p'(\underbrace{q' + 1} + q) = p'$

$q' + q = 1 , 1 + 1 = 1$

ليست استدلال وليست تناقض

3) $(p \Rightarrow q) + (q \Rightarrow p) = (p' + q) + (q' + p)$

$= p' + p + q + q' = 1 + 1 = \boxed{1}$

استدلال

((تأكدت الاجابات باستخدام الجدول))

اثبات $(p \Rightarrow q)' . (q \Rightarrow p)' = 0$ (تناقض)

وتأكدت من ذلك باستخدام جدول الحقيقة